

**REKABENTUK PERMUKAAN BENTUK
BEBAS MENGGUNAKAN PERSAMAAN
PEMBEZAAN SEPARA (PPS)**

Oleh

ZAINOR RIDZUAN BIN YAHYA

**Tesis yang diserahkan untuk memenuhi
keperluan bagi Ijazah Sarjana Sains
(Matematik)**

Jun 2008

PENGHARGAAN

Dengan Nama Allah Yang Maha Pemurah Lagi Maha Penyayang.

Segala puji dan syukur bagi Allah yang telah mengizinkan saya menjayakan penyelidikan ini. Juga ribuan terima ingin saya tujukan kepada ibu bapa yang memberi dorongan dalam menyempurnakan tesis ini. Tanpa dorongan mereka, tidak mungkin saya dapat menyiapkan penyelidikan ini dengan sempurna. Pertama, saya ingin mengambil kesempatan ini merakamkan ribuan terima kasih kepada penyelia, Prof. Madya Jamaludin Md. Ali yang memberi tunjuk ajar, cadangan dan dorongan kepada saya. Terima kasih juga diucapkan kepada R. U. Gobithasan dalam penyempurnaan tesis ini. Akhirnya terima kasih diberikan kepada Universiti Sains Malaysia dan Pusat Pengajian Sains Matematik, USM yang membiaya penyelidikan dan pembelajaran saya dibawah Skim Biasiswa Pasca Siswazah dan Geran Jangkamasa Pendek dengan kod 304/PMATHS/637057.

JADUAL KANDUNGAN

PENGHARGAAN	i
JADUAL KANDUNGAN	ii
SENARAI JADUAL	v
SENARAI RAJAH	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
1 PENGENALAN	1
1.1 Susunan Kajian	5
2 PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA	6
2.1 Pengenalan	6
2.2 Jenis Persamaan Pembezaan Separa(PPS)	7
2.3 Kaedah Penyelesaian Persamaan Pembezaan Separa	9
2.4 Pemisahan Pembolehubah	10
2.4.1 Pandangan Keseluruhan Pemisahan Pembolehubah	11
2.4.2 Kaedah Pemisahan Pembolehubah	12
2.5 Siri Fourier	16
2.5.1 Fungsi Berkala	17
2.5.2 Identiti Trigonometri dan Rumus Kamiran	18
2.5.3 Pengiraan Pekali Siri Fourier	20

2.5.4	Siri Fourier di dalam selang $(-L, L)$	22
3	KAEDAH PERMUKAAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA (PPS) BLOOR-WILSON	24
3.1	Pengenalan	24
3.2	Kaedah pembezaan separa untuk penjanaan gambarajah bentuk bebas	26
3.3	Penyelesaian matematik	27
3.4	Rekabentuk Pasu	28
3.4.1	Kesan perubahan parameter pelicin	31
3.4.2	Kesan perubahan syarat-syarat sempadan fungsian	32
3.4.3	Kesan perubahan syarat-syarat sempadan tangen	32
3.5	Rekabentuk hul kapal	36
3.6	Permukaan Persamaan Pembezaan Separat (PPS) berdarjah enam	40
3.7	Kesimpulan	43
4	ALTERNATIF KEPADA KAEDAH PPS BLOOR-WILSON	44
4.1	Pengenalan	44
4.2	Persamaan Pembezaan Separat (PPS) dan Penyelesaian Tertutupnya	45
4.3	Rekabentuk Bilah Kipas	48
4.3.1	Kesan Perubahan Parameter Bentuk	52
4.4	Kesimpulan	53
5	REKABENTUK ANTARAMUKA BAGI PENJANAAN PERMUKAAN PEMBEZAAN SEPARA	55
5.1	Pengenalan	55
5.2	Rekabentuk antaramuka permukaan pasu	56
5.3	Rekabentuk Antaramuka Kapal	57
5.4	Kesimpulan	58
6	KESIMPULAN	59
6.1	Cadangan Penyelidikan	60

RUJUKAN	61
PENERBITAN	65

SENARAI JADUAL

4.1	Nilai-nilai Parameter Bagi Bilah Kipas	49
4.2	Nilai-nilai Parameter Bentuk Bagi Bilah Kipas	52

SENARAI RAJAH

2.1	Rajah bagi masalah pengaliran haba dalam suatu rod	11
2.2	Masalah nilai awal bagi pengaliran haba	12
2.3	Penyelesaian asasi $u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi x)^2 t} \sin n\pi x$	16
3.1	Rekabentuk pelan pasu	28
3.2	Bentuk pasu	31
3.3	Kesan perubahan parameter a_y terhadap bentuk pasu	32
3.4	Kesan perubahan parameter a_x terhadap bentuk pasu	33
3.5	Kesan perubahan parameter a terhadap bentuk pasu	33
3.6	Kesan perubahan parameter nilai H terhadap bentuk pasu	33
3.7	Kesan perubahan parameter nilai r_x dan r_y terhadap bentuk pasu	34
3.8	Kesan perubahan parameter nilai R_x dan R_y terhadap bentuk pasu	34
3.9	Kesan perubahan parameter nilai r' terhadap bentuk pasu	35
3.10	Kesan perubahan parameter nilai R' terhadap bentuk pasu	35
3.11	Kesan perubahan parameter nilai S_{top} terhadap bentuk pasu	36
3.12	Rekabentuk Pelan Kapal	37
3.13	Kesan perubahan parameter nilai S_{y_0} terhadap bentuk kapal	39
3.14	Kesan perubahan parameter S_{x_1} terhadap bentuk kapal	39
3.15	Perbandingan permukaan PPS berdarjah empat dan enam	43
4.1	Profil Bilah Kipas	48
4.2	Syarat Sempadan	50
4.3	Bentuk Bilah Kipas dari Berlainan Sisi	50
4.4	Bentuk Bilah Kipas dari Pelbagai Sudut	51

4.5	Bentuk Bilah Kipas menurut Jadual 4.2	53
5.1	Rekabentuk Antaramuka Permukaan Pasu	56
5.2	Rekabentuk Antaramuka Hul Kapal	57

REKABENTUK PERMUKAAN BENTUK BEBAS MENGGUNAKAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA (PPS)

ABSTRAK

Tesis ini akan membincangkan tentang penjanaan permukaan menggunakan kaedah baru yang dipanggil permukaan persamaan pembezaan separa (PPS) yang ditakrif sebagai permukaan licin hasil penyelesaian suatu PPS eliptik seperti yang dibentangkan oleh Bloor dan Wilson (1989). Kita akan melihat bagaimana menjana permukaan bentuk bebas menggunakan kaedah ini. Memandangkan terdapat alternatif kepada kaedah Bloor dan Wilson (1989), kita juga akan membincangkan kaedah alternatif ini. Akhirnya, kita akan membincangkan penggunaan antaramuka pengguna untuk memahami kaedah PPS.

FREE-FORM SURFACE DESIGN USING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION (PDE)

ABSTRACT

This thesis will discuss on generating surfaces using a novel method call partial differential equations (PDE) surfaces which is defined as smooth surface as a solution of an elliptic PDE as presented by Bloor and Wilson (1989). We will see how to generate free-form surfaces using this method. As there is an alternative to the previous method, we will also discuss on this alternative method. Lastly, we will discuss the usage of user interface to make understanding upon PDE method.

BAB 1

PENGENALAN

Rekabentuk Berbantuan Komputer (RBK) atau Computer Aided Design (CAD) dan Rekabentuk Geometri Berbantuan Komputer (RGBK) atau Computer Aided Geometric Design (CAGD) merupakan satu bidang kajian dalam matematik. Dalam RGBK dan RBK, kita membina lengkung dan permukaan dengan menggunakan perwakilan matematik dan teknologi grafik komputer. Teknologi RGBK dalam bidang kejuruteraan telah digunakan secara meluas dalam industri perkapalan, pembuatan kereta dan pembinaan kapal terbang. Maka, perwakilan matematik boleh digunakan bagi menggambarkan suatu rekabentuk kejuruteraan.

Pada masa kini, terdapat pelbagai kaedah untuk menjana permukaan dalam bidang rekabentuk geometri. Teknik berasaskan Splin sangat popular sejak beberapa tahun ini. Sedikit penjelasan berkenaan kaedah-kaedah tersebut akan diterangkan dalam bab ini. Splin-B adalah lengkung yang boleh dibentuk daripada suatu set titik-titik kawalan. Kaedah ini menggunakan interpolasi polinomial di sepanjang set titik-titik kawalan yang sempurna. Namun, apabila polinomial yang berdarjah lebih tinggi diperoleh menggunakan kaedah ini, permukaan yang terhasil kurang licin (Gonzalez Castro et al., 2007). Kemudian, bagi mengkaji kelicinan pada permukaan tersebut, interpolasi cebis demi cebis digunakan. Bezier dan De Casteljaou, masing-masing dalam bidang rekabentuk automotif,

merupakan orang-orang awal dalam bidang ini (Farin, 2001).

Berikut merupakan jenis-jenis Splin yang biasa digunakan dalam RGBK:

Permukaan Bezier. Permukaan ini dijana sebagai satu jujukan segmen kubik daripada linear. Permukaan ini ditakrifkan sebagai

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n P_{j,k} \text{Bez}_{j,m}(v) \text{Bez}_{k,n}(u), \quad (1.0.1)$$

yang mana $P_{j,k}$ menunjukkan titik kawalan dan

$$\text{Bez}_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k}.$$

Splin-B. Fungsi ini merupakan polinomial cebis demi cebis dengan sokongan minimum. Fungsi-fungsi asas tersebut dicari dengan syarat-syarat tertentu dan bergantung kepada bilangan knot (titik pertemuan) yang diperlukan. Dengan itu, permukaan Splin-B ditakrif sebagai:

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{j,k}, \quad (1.0.2)$$

yang mana $P_{j,k}$ merupakan titik-titik kawalan, $N_{i,p}$ dan $N_{j,q}$ merupakan fungsi asas Splin-B masing-masing berperingkat p dan q . Suatu fungsi asas Splin-B dengan peringkat r diberi sebagai:

$$N_{i,r} = \frac{u - u_i}{u_{i+r-1} - t_i} N_{i,r-1} + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+r} - u_{i+1}} N_{i+1,r-1},$$

dengan u_i merujuk kepada satu komponen knot vektor.

NURBS. Non-uniform rational B-splines terbentuk daripada lengkung B-Splines dan Bezier. Perbezaannya ialah NURBS mengandungi pemberat pada titik-titik kawalan,

yang juga menjadi sebab ia dipanggil nisbah. Permukaan NURBS ditakrifkan sebagai:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{j,k} P_{j,k}}{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{j,k}}, \quad (1.0.3)$$

yang mana $\omega_{j,k}$ adalah pemberat merujuk kepada titik kawalan $P_{j,k}$. Selain daripada kaedah konvensional, kaedah persamaan pembezaan separa juga boleh digunakan secara meluas dalam bidang geometri berkomputer. Jadi, objektif utama kajian ini, adalah untuk mengkaji dan meneliti bagaimana cara menggunakan kaedah persamaan pembezaan separa ini untuk menjana permukaan bentuk bebas dan sifat-sifatnya.

Pada 1989, kajian berkenaan PPS telah mula diperkenalkan oleh Bloor dan Wilson untuk membentuk permukaan adunan (Bloor dan Wilson, 1989). Mereka kemudiannya menggunakan PPS untuk membuat permukaan bentuk bebas (Bloor dan Wilson, 1990a). Kemudian, mereka telah menggunakan PPS dalam bentuk Splin-B supaya ia boleh dikaitkan dengan kaedah pemodelan geometri terkini (Bloor dan Wilson, 1990b). PPS juga digunakan untuk menjana permukaan dengan menggunakan parameter yang memberi kesan terhadap permukaan (Lowe et al., 1990). Lowe et al. (1994) memodelkan kapal layar menggunakan PPS dengan bilangan parameter yang sedikit. Dekanski et al. (1995, 1996a) telah menjanakan bilah kipas kapal menggunakan PPS eliptik. Bloor dan Wilson menggunakan PPS untuk membentuk geometri kapal terbang (Bloor dan Wilson, 1995).

PPS juga didapati mempunyai penyelesaian tertutup walaupun dengan menggunakan syarat-syarat sempadan secara umum (Bloor dan Wilson, 1996). Dekanski et al. (1996b) menjanakan enjin dua lejang dengan ciri-ciri yang baik. Bloor dan Wilson (1997) menjanakan permukaan sayap kapal terbang menggunakan suatu set seksyen airfoil. Brown et al. (1998) mengkaji ketepatan kaedah unsur terhingga Splin-B terhadap permukaan PPS. Ugail et al. (1999b,a) membuat antaramuka interaktif yang digunakan untuk menggambarkan kegunaan PPS dalam menjana permukaan. Kemudian, permukaan PPS dengan enam tampalan diperkenalkan (Brown et al., 1999). Du dan Qin (2000) membentangkan

algoritma gabungan teknik permukaan PPS dan teknik pemodelan PPS berdasarkan fizik untuk menunjukkan kemampuan PPS dalam penjanaan permukaan. Zhang dan You menjana permukaan bentuk bebas seperti pasu menggunakan PPS eliptik berdarjah empat dengan penyelesaian analitis (Zhang dan You, 2002). Mereka juga turut memodelkan benda yang berubah bentuk mengikut masa (You dan Zhang, 2003) bagi menunjukkan kelebihan permukaan PPS.

PPS berdarjah empat diselesaikan menggunakan kaedah siri Pseudo-Levy yang lebih cepat dan tepat penyelesaiannya (Zhang et al., 2003). PPS berdarjah enam dengan penyelesaian analitis (Kubiesa et al., 2004) digunakan bagi syarat-syarat sempadan yang dimasukkan secara interaktif bagi membolehkan perubahan pada permukaan. Dalam (Monterde dan Ugail, 2004), permukaan dijana dengan maklumat-maklumat sempadan berdasarkan operator PPS eliptik. Kajian berkenaan kaedah yang dipanggil harmonik dan biharmonik Bezier turut dibuat. Dalam (Ugail, 2004) ditunjukkan bagaimana rangka suatu permukaan PPS berfungsi dan bagaimana ia boleh digunakan untuk mengubah bentuk permukaan. PPS berdarjah enam digunakan untuk menyelesaikan masalah keselantaran C^2 dalam permukaan adunan (You et al., 2004a). PPS berdarjah empat digunakan untuk menyelesaikan masalah permukaan adunan dan menggunakan tiga parameter bentuk (You et al., 2004b).

PPS berdarjah enam digunakan untuk menjana permukaan dengan cepat dengan penyelesaian analitikal (Zhang dan You, 2004a). PPS dengan darjah yang sama mempunyai keselantaran kelengkungan (Zhang dan You, 2004b; You dan Zhang, 2005). Siri kuasa juga digunakan untuk menyelesaikan masalah permukaan adunan dengan PPS berdarjah empat (Zhang dan You, 2004c). Bloor dan Wilson menggunakan kaedah analitis pseudo-spectral untuk menjana empat tampalan permukaan (Bloor, 2005). Rekabentuk permukaan dijalankan dengan menggunakan syarat-syarat sempadan suatu PPS (Ugail, 2005). Dalam (Monterde dan Ugail, 2006), kaedah menjana permukaan Bezier menggunakan maklumat sempadan kepada suatu PPS berdarjah empat diterangkan. Ugail

(2006) memperkenalkan kaedah untuk melubangkan sesuatu permukaan PPS yang telah dibentuk. Kaedah simulasi berangka digunakan untuk membentuk vesikel dan vesikel membran dengan menyelesaikan masalah PPS (Ugail et al., 2006). Menggunakan kajian-kajian yang telah dijalankan ini, tesis ini dapat disiapkan.

1.1 Susunan Kajian

Dalam Bab 2, kita akan membincangkan secara ringkas tentang persamaan pembezaan separa. Beberapa istilah penting yang sering timbul apabila kita memperkatakan tentang PPS akan dibincangkan. Dalam bab ini juga, kaedah pemisahan pembolehubah sebagai satu kaedah penyelesaian PPS akan dibincangkan dan perbincangan kemudiannya diteruskan kepada siri Fourier. Dalam Bab 3 pula, kita akan mengkaji kaedah pembezaan separa yang diperkenalkan oleh Bloor dan Wilson di Leeds University pada 1989. Kaedah itu akan digunakan untuk menjana beberapa rajah bentuk bebas seperti pasu dan hul kapal. Kemudian, dalam Bab 4, kaedah asal yang diubahsuai oleh You dan Zhang akan dibentangkan.

Seterusnya kita akan meninjau penggunaan antaramuka bagi penjanaan permukaan PPS bagi memudahkan pengguna dalam Bab 5. Dalam bab ini, kita akan menggunakan bentuk-bentuk permukaan yang ada dalam bab sebelumnya untuk diimplementasikan dengan menggunakan perisian *MATLAB* 7. Selain itu, kesimpulan akan dibuat pada pengakhiran tesis ini dalam Bab 6.

BAB 2

PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA

Kebanyakan fenomena fizikal boleh diperihalkan secara umum oleh persamaan pembezaan separa (PPS). Ini termasuklah bidang-bidang sains seperti dinamik bendalir, elektrik, magnetik, mekanik, optik dan pengaliran haba. Sebenarnya kebanyakan persamaan yang timbul di dalam ilmu fizik matematik adalah PPS. Adalah benar bahawa PPS boleh diringkaskan kepada persamaan pembezaan biasa. Walaubagaimanapun, penyelesaian yang lengkap bagi system berkenaan hanya boleh didapati melalui PPS secara am (Ismail, 2003).

2.1 Pengenalan

Persamaan pembezaan separa ialah persamaan yang mengandungi terbitan separa. Bagi persamaan pembezaan biasa (PPB), fungsi yang belum diketahui itu hanya bergantung kepada satu pembolehubah. Namun, bagi PPS, fungsi yang belum diketahui itu bergantung kepada beberapa pembolehubah (misalnya suhu $u(x, t)$ bergantung kepada kedua-dua lokasi x dan t).

Suatu PPB berbentuk

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0 \quad (2.1.1)$$

melibatkan pembolehubah tak bersandar x dan satu fungsi y dan terbitan y', y'', \dots yang bersandar terhadap pembolehubah x , dengan

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \quad (2.1.2)$$

Sebaliknya suatu PPS ialah persamaan

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.1.3)$$

yang melibatkan beberapa pembolehubah tak bersandar x, y, \dots , fungsi u bagi pembolehubah ini dan terbitan separa $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots$ bagi fungsi tersebut. Terbitan separa ini ditakrifkan sebagai

$$u_x = \frac{\delta u}{\delta x}, u_y = \frac{\delta u}{\delta y}, u_{xx} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}, u_{yy} = \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \quad (2.1.4)$$

2.2 Jenis Persamaan Pembezaan Separa(PPS)

Persamaan pembezaan separa boleh dikelaskan mengikut pelbagai cara. Pengelasan merupakan suatu konsep yang penting kerana biasanya teori umum dan kaedah penyelesaian hanya sesuai untuk suatu kelas persamaan sahaja. Terdapat enam pengelasan asas seperti berikut:

- **Peringkat PPS.**

Peringkat PPS ialah peringkat terbitan separa yang tertinggi di dalam PPS, misalnya,

$$u_t = u_{xx} \quad (\text{peringkat kedua})$$

$$u_t = u_x \quad (\text{peringkat pertama})$$

$$u_t = uu_{xxx} + \sin x \quad (\text{peringkat ketiga})$$

- **Bilangan Pembolehubah.**

Bilangan pembolehubah ialah bilangan pembolehubah tak bersandar, misalnya,

$$u_t = u_{xx} \quad (\text{dua pembolehubah: } x \text{ dan } t)$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad (\text{tiga pembolehubah: } r, \theta \text{ dan } t)$$

- **Kelinearan.**

PPS adalah sama ada linear atau tak linear. Bagi persamaan yang linear, pembolehubah bersandar u dan semua terbitannya muncul bercorak linear (misalnya tidak didarabkan atau tidak dikuasa dua). Lebih tepat lagi, persamaan peringkat kedua yang linear di dalam dua pembolehubah adalah persamaan berbentuk:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (2.2.1)$$

Di sini A, B, C, D, E, F dan G mengambil nilai malar atau fungsi x dan y , misalnya,

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad (\text{linear})$$

$$uu_{xx} + u_t = 0 \quad (\text{tak linear})$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad (\text{linear})$$

$$xu_x + yu_y + u^2 = 0 \quad (\text{tak linear})$$

- **Kehomogenan.**

Persamaan (2.2.1) dipanggil homogen jika sebutan di sebelah kanan iaitu $G(x, y)$ adalah sifar bagi semua nilai x dan y . Jika tidak, persamaan itu dipanggil tak homogen.

- **Jenis Pekali.**

Jika pekali A, B, C, D, E dan F dalam persamaan (2.2.1) adalah malar, maka persamaan (2.2.1) disebutkan sebagai mempunyai pekali malar. Jika tidak, persamaan itu dikenali sebagai mempunyai pekali tak malar.

- **Tiga Jenis Asas Persamaan Linear.**

Setiap PPS linear seperti dalam persamaan (2.2.1) adalah sama ada

– **Parabolik.**

Persamaan parabolik memperihalkan pengaliran haba dan proses pembauran dan memenuhi syarat $B^2 - 4AC = 0$.

– **Hiperbolik.**

Persamaan hiperbolik memperihalkan sistem bergetar dan gerakan gelombang yang memenuhi syarat $B^2 - 4AC > 0$.

– **Eliptik.**

Persamaan eliptik memperihalkan fenomena keadaan mantap dan memenuhi syarat $B^2 - 4AC < 0$.

Contohnya,

$$u_t = u_{xx} \quad (\text{parabolik})$$

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (\text{hiperbolik})$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\text{eliptik})$$

2.3 Kaedah Penyelesaian Persamaan Pembezaan Separa

Suatu persamaan pembezaan separa (PPS) boleh diselesaikan secara analitikal atau dengan menggunakan kaedah berangka seperti kaedah beza terhingga (finite difference), kaedah elemen terhingga (finite element method) dan kaedah sisa berperingkat (weighted residual method). Penyelesaian kepada suatu PPS secara analitikal dapat diperolehi dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah. Dalam bahagian seterusnya, kita hanya akan menumpukan penyelesaian bagi PPS dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah sahaja yang akan melibatkan perbincangan mengenai siri Fourier. Kaedah berangka tidak akan dibincangkan dalam tesis ini.

2.4 Pemisahan Pembolehubah

Pemisahan pembolehubah adalah salah satu daripada teknik lama untuk menyelesaikan masalah nilai awal sempadan (Farlow, 1990) dan digunakan kepada masalah dengan

- PPS linear dan homogen (tidak semestinya berpekali malar)
- Syarat Sempadan (SS) dalam bentuk

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\gamma u_x(1, t) + \delta u(1, t) = 0 \quad (2.4.2)$$

dengan α, β, γ dan δ malar (syarat sempadan bentuk ini dipanggil homogen SS linear) (Farlow, 1990).

Tetapi, untuk memperihalkan suatu masalah fizikal, kita memerlukan tiga jenis persamaan berikut:

- PPS yang memerihalkan fenomena fizikal pengaliran haba.
- SS yang memerihalkan tabii fizikal masalah mengenai sempadan.
- Syarat Awal(SA) yang memerihalkan fenomena fizikal pada awal eksperimen.

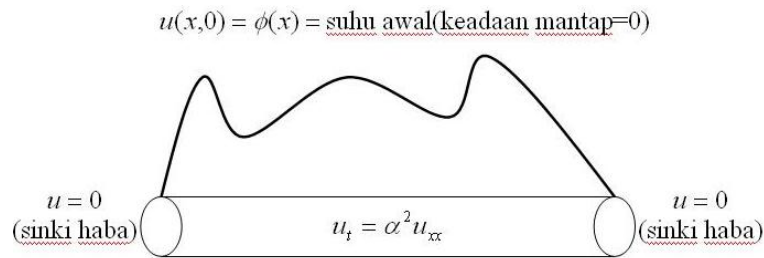
Sekarang pertimbangkan masalah pengaliran haba melalui suatu rod seperti berikut:

$$\text{PPS} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t < \infty \quad (2.4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{SS} \quad u(0, t) &= 0 \\ u(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad 0 < t < 1 \quad (2.4.4)$$

$$\text{SA} \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.4.5)$$

Gambaran ringkas berkaitan masalah ini diberikan dalam Rajah 2.1



Rajah 2.1: Rajah bagi masalah pengaliran haba dalam suatu rod

Sebelum kita menyentuh mengenai pemisahan pembolehubah, mari kita fikirkan tentang masalah nilai awal sempadan di atas terlebih dahulu (masalah yang diberikan oleh persamaan (2.4.3) dengan syarat-syarat (2.4.4) dan (2.4.5) dikenali sebagai masalah nilai awal sempadan). Di sini kita ada rod terhingga dengan suhu di hujungnya ditetapkan fasa sifar. Kita juga diberi data untuk masalah ini dalam bentuk syarat awal. Matlamat kita ialah untuk mencari suhu pada setiap titik dalam rod berkenaan. Sebelum menyelesaikan masalah di atas, kita akan melihat pandangan secara keseluruhan mengenai kaedah pembolehubah ini.

2.4.1 Pandangan Keseluruhan Pemisahan Pembolehubah

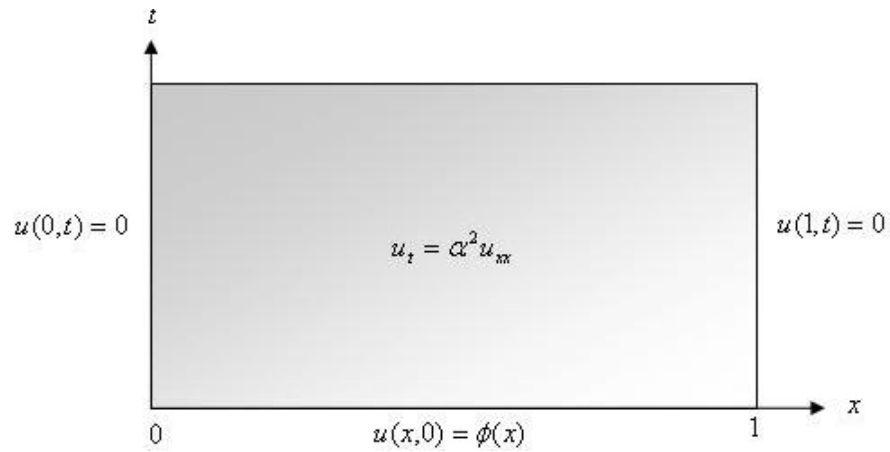
Pemisahan pembolehubah mencari penyelesaian kepada PPS berbentuk

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.4.6)$$

dengan $X(x)$ ialah fungsi dari x dan $T(t)$ ialah fungsi dari t . Penyelesaian adalah mudah kerana sebarang suhu $u(x, t)$ berbentuk ini akan mengekalkan "bentuk" asasnya bagi nilai masa t yang berlainan. Idea am ialah ada kemungkinan kita dapat mencari tak terhingga banyaknya penyelesaian kepada PPS (yang memenuhi syarat awal). Fungsi mudah

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) \quad (2.4.7)$$

yang dipanggil penyelesaian asasi adalah asas pembinaan kepada masalah yang dibincangkan di atas. Jadi penyelesaian $u(x, t)$ yang dicari boleh didapati dengan menam-



Rajah 2.2: Masalah nilai awal bagi pengaliran haba

bahkan penyelesaian asasi ini, $X_n(x)T_n(t)$ supaya hasil tambahnya

$$\sum A_n X_n(x) T_n(t) \quad (2.4.8)$$

memenuhi syarat awal. Oleh sebab hasil tambah ini memenuhi PPS dan syarat awal, sekarang kita telah mempunyai penyelesaian kepada masalah tersebut. Sekarang kita akan membincangkan kaedah pemisahan pembolehubah secara terperinci (Farlow, 1990).

2.4.2 Kaedah Pemisahan Pembolehubah

LANGKAH 1 (Mencari penyelesaian permulaan bagi PPS)

Kita ingin mencari fungsi $u(x, t)$ yang memenuhi masalah nilai awal yang diberikan oleh persamaan (2.4.3) dengan syarat-syarat (2.4.4) dan (2.4.5) seperti yang digambarkan dalam Rajah 2.2. Untuk mencari penyelesaiannya, kita akan mencari suatu penyelesaian yang berbentuk $u(x, t) = X(x)T(t)$ dengan menggantikan $X(x)T(t)$ ke dalam PPS dan menyelesaikan untuk $X(x)T(t)$. Penggantian ini menghasilkan

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad (2.4.9)$$

Kemudian, kedua-dua belah persamaan (2.4.9) dibahagi dengan $\alpha^2 X(x)T(t)$ dan kita dapati

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.4.10)$$

iaitu kita telah perolehi apa yang dipanggil pembolehubah terpisahkan, di mana di sebelah kiri persamaan hanya bergantung kepada t dan sebelah kanan pula bergantung hanya kepada x . Oleh sebab x dan t tak bersandar antara satu sama lain, jadi hanya terdapat satu kemungkinan sahaja, iaitu kedua-dua belah persamaan mestilah pemalar tetap(katakan k). Maka kita boleh tulis

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = k \quad (2.4.11)$$

atau

$$T' - k\alpha^2 T = 0 \quad (2.4.12)$$

$$X'' - kX = 0 \quad (2.4.13)$$

Perhatikan bahawa kita telah menukar persamaan pembezaan separa kepada persamaan pembezaan biasa. Jadi kita boleh menyelesaikan kedua-dua persamaan pembezaan biasa ini. Walaubagaimanapun, kita perlu membuat satu pemerhatian penting, iaitu kita inginkan pemalar pemisahan, k menjadi negatif (Jika tidak, faktor $T(t)$ tidak menumpu ke sifar apabila $t \leftarrow \infty$). Dengan mempertimbangkan pemerhatian ini, telah menjadi satu amalan biasa untuk kita menggunakan lambang baru, $k = -\lambda^2$, dengan λ bukan sifar. Maka persamaan (2.4.13) dan (2.4.14) boleh ditulis semula sebagai

$$T' + \lambda^2 \alpha^2 T = 0 \quad (2.4.14)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2.4.15)$$

Sekarang kita akan menyelesaikan kedua-dua persamaan ini. Tetapi persamaan (2.4.14) dan (2.4.15) merupakan persamaan pembezaan biasa berbentuk piawai yang mempunyai

penyelesaian

$$T(t) = Pe^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \quad (2.4.16)$$

$$X(x) = Q \sin(\lambda x) + R \cos(\lambda x) \quad (2.4.17)$$

di mana P , Q dan R adalah pemalar sebarang. Jadi fungsi $u(x, t)$ dapat ditulis sebagai

$$u(x, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \quad (2.4.18)$$

dengan A dan B adalah pemalar sebarang. Persamaan (2.4.18) akan memenuhi persamaan pembezaan separa $u_t = \alpha^2 u_{xx}$. Tetapi buat masa ini, kita hanya memperoleh fungsi yang tak terhingga banyaknya yang memenuhi PPS.

LANGKAH 2 (Mencari penyelesaian kepada PPS dan SS)

Sekarang kita telah mempunyai penyelesaian kepada PPS tetapi tidak kesemuanya memenuhi syarat awal atau syarat sempadan. Langkah berikut ialah untuk memilih subset tertentu daripada penyelesaian berikut

$$u(x, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \quad (2.4.19)$$

yang memenuhi syarat sempadan

$$u(0, t) = 0 \quad (2.4.20)$$

$$u(1, t) = 0 \quad (2.4.21)$$

Untuk berbuat demikian, kita perlu menggantikan penyelesaian (2.4.19) ke dalam (2.4.20) dan (2.4.21) seperti berikut:

$$u(0, t) = Be^{-\lambda^2 \alpha^2 t} = 0 \quad \Rightarrow B = 0 \quad (2.4.22)$$

$$u(1, t) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin \lambda = 0 \quad \Rightarrow \sin \lambda = 0 \quad (2.4.23)$$

Jadi syarat sempadan ini menghalang pemalar pemisahan λ dari mengambil sebarang nombor bukan sifar. Ia mesti menjadi punca persamaan $\sin \lambda = 0$. Dengan kata lain, untuk memenuhi (2.4.21), kita memilih

$$\lambda = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \quad (2.4.24)$$

atau

$$\lambda_n = \pm n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.25)$$

Perhatikan bahawa persamaan (2.4.21) juga boleh menyarankan supaya $A = 0$. Tetapi jika kita mempertimbangkan kes ini, kita akan mendapat penyelesaian sifar dalam (2.4.19). Sekarang kita telah menyelesaikan langkah kedua dan telah menemui fungsi yang tak terhingga banyaknya iaitu

$$u_n(x, t) = A_n e^{-(n\lambda)^2 t} \sin(n\lambda x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.26)$$

di mana setiap satunya memenuhi PPS dan SS. Inilah asas pembinaan masalah ini dan penyelesaian yang diinginkan terdiri daripada hasil tambah tertentu dari fungsi mudah ini. Hasil tambah tertentu ini akan bergantung kepada syarat awal. Rujuk Rajah 2.3 untuk graf penyelesaian asasi $u_n(x, t)$.

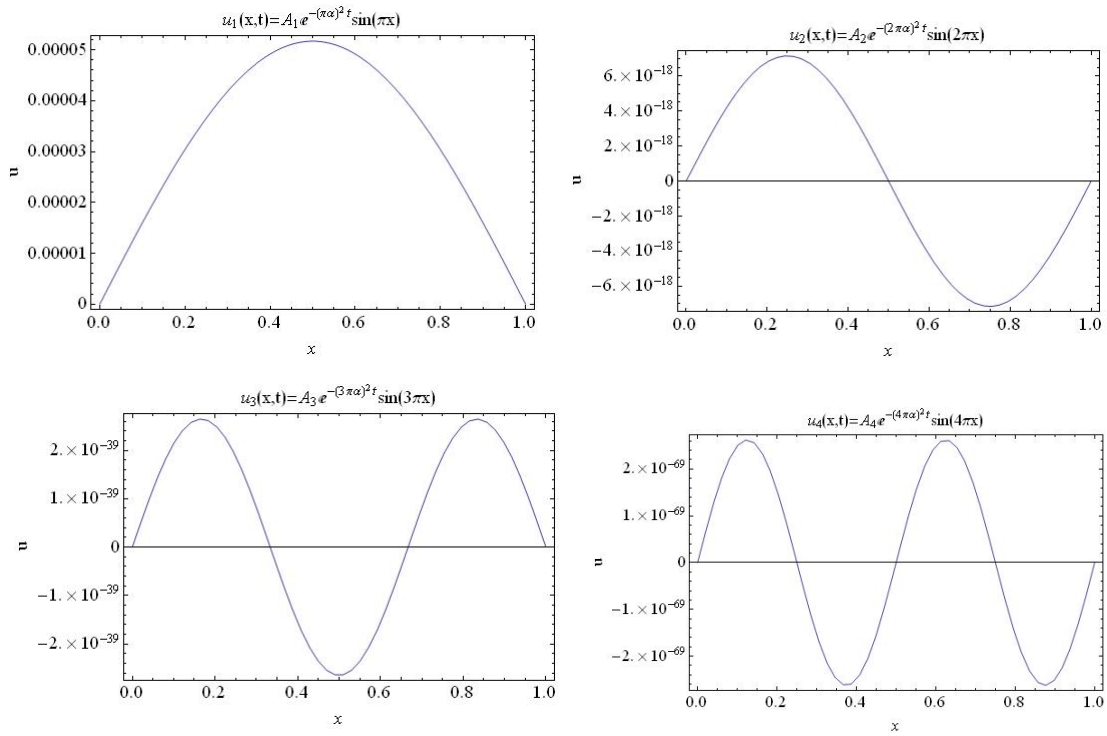
LANGKAH 3 (Mencari penyelesaian kepada PPS,SS dan SA)

Langkah terakhir ialah untuk menambahkan penyelesaian asasi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.4.27)$$

dengan memilih pekali A_n supaya syarat awal

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (2.4.28)$$



Rajah 2.3: Penyelesaian asasi $u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin n\pi x$

dipenuhi. Dengan menggantikan (2.4.28) ke dalam persamaan (2.4.27), kita akan dapati

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \quad (2.4.29)$$

Untuk mendapatkan nilai bagi A_n , kita perlu menggunakan siri Fourier yang akan dibincangkan dalam bahagian seterusnya (Farlow, 1990).

2.5 Siri Fourier

Dalam Bahagian 2.4.2, kita telah melihat bahawa masalah nilai awal dan sempadan tersebut bergantung kepada pemalar A_n yang diberi oleh persamaan (2.4.29). Siri $\sum A_n \sin(n\pi x)$ ialah suatu siri tak terhingga dalam sebutan sinus. Memandangkan siri ini ialah kes khas bagi siri tak terhingga dalam sebutan sinus dan kosinus

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) \quad (2.5.1)$$

dengan a_0 , a_n dan b_n adalah pemalar, maka perbincangan akan terlebih dahulu ditumpukan kepada siri tak terhingga (2.5.1).

Siri tak terhingga ini jika memenuhi syarat-syarat tertentu dinamakan siri Fourier. Memandangkan penilaian a_0 , a_n dan b_n banyak melibatkan fungsi berkala $f(x)$ yang terdapat dalam masalah fizikal misalnya, getaran suatu spring, pergerakan planet terhadap matahari, putaran bumi terhadap paksinya, pergerakan gelombang dan sebagainya, maka kita akan memulakan perbincangan kita berkenaan fungsi berkala (Jamalludin Talib, 1991).

2.5.1 Fungsi Berkala

Jika suatu fungsi f tertakrif bagi semua nilai x dan mempunyai sifat

$$f(x + T) = f(x), \quad (2.5.2)$$

maka f dikatakan berkala dengan kalaan T . Jika fungsi tersebut berkala dengan kalaan T , maka fungsi tersebut juga berkala dengan kalaan $2T$,

$$f(x + 2T) = f(x + T) = f(x). \quad (2.5.3)$$

Secara amnya, boleh dibuat kesimpulan bahawa bagi sebarang integer n ,

$$f(x + nT) = f(x), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5.4)$$

Disamping itu, fungsi f juga mempunyai sifat kamiran berikut :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx. \quad (2.5.5)$$

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ berkala dengan kalaan T , hasil daripada pendaraban, pembahagian, penambahan dan penolakan bagi fungsi ini juga merupakan fungsi yang berkala dengan kalaan T .

2.5.2 Identiti Trigonometri dan Rumus Kamiran

Jika fungsi f berkala dengan kalaan 2π , kita cuba mendapatkan perwakilan bagi fungsi ini dalam bentuk siri tak terhingga berikut

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.5.6)$$

dengan a_0, a_k dan b_k memerlukan beberapa identiti trigonometri serta sifat-sifat kamiran fungsi trigonometri $\sin x$ dan $\cos x$ (Jamalludin Talib, 1991). Identiti yang diperlukan ialah

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x \quad (2.5.7)$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x \quad (2.5.8)$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \sin(m-n)x \quad (2.5.9)$$

Sifat-sifat kamiran fungsi trigonometri yang diperlukan ialah

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (2.5.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (2.5.11)$$

Dengan menggunakan identiti (2.5.7) hingga (2.5.9), kita akan cuba mendapatkan kamiran-kamiran berikut:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$

Disini kita akan membicarakan bagaimana mendapatkan 1. Anggapkan bahwa $m \neq n$, maka

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sebaliknya jika $n = m$, maka

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2mx}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \text{ bagi sebarang integer } m, n$$

dan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{jika } m = n \\ 0, & \text{jika } m \neq 0 \end{cases}$$

Keputusan yang diperoleh boleh diringkaskan seperti berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi \delta_{m,n} \quad (2.5.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (2.5.13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi \delta_{m,n} \quad (2.5.14)$$

dengan m dan n integer dan

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{jika } m \neq n \\ 1, & \text{jika } m = n \end{cases}$$

Sifat-sifat kamiran bagi (2.5.12) hingga (2.5.14) dikenali sebagai **sifat keortogonalan** (Jamalludin Talib, 1991).

2.5.3 Pengiraan Pekali Siri Fourier

Setelah kita mengkaji sifat-sifat keortogonalan fungsi sinus dan kosinus, kita akan cuba mendapatkan pekali a_0 , a_n dan b_n bagi fungsi berkala f yang ditulis dalam siri trigonometri yang berbentuk

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.5.15)$$

Pengiraan pekali a_0

Daripada sifat kamiran (2.5.10) dan (2.5.11), kita dapati bahawa jika persamaan (2.5.15) dikamirkan dari selang $-\pi$ hingga π terhadap x , kamiran bagi sebutan dalam kurungan menjadi sifar seperti berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$$

Jika kamiran

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{dan } \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \text{ serta } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

$$\text{maka } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx \text{ atau } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$$

Ini bermakna

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (2.5.16)$$

Pengiraan pekali a_n

Untuk mendapatkan a_n , kita akan menggunakan sifat keortogonalan di atas. Dengan mendarabkan persamaan (2.5.15) dengan $\cos mx$ dan kemudian mengamirkan dari $-\pi$ hingga π terhadap x , kita peroleh

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) dx \end{aligned}$$

Tetapi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx = 0 \quad (2.5.17)$$

dan jika

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \cos mx) dx \\ &+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \cos mx) dx \end{aligned}$$

maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \cos mx) dx = \pi \text{ apabila } n = m$$

dan

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \cos mx) dx = 0 \text{ bagi sebarang integer } m, n.$$

Oleh itu,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi$$

Seterusnya dengan menukar indeks m kepada n , kita peroleh

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (2.5.18)$$

Pengiraan pekali b_n

Dengan mendarabkan persamaan (2.5.15) dengan $\sin mx$ dan mengamirkan dari $-\pi$ hingga π terhadap x , dapat ditunjukkan bahawa

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (2.5.19)$$

Untuk tujuan pemudahan, dapat diringkaskan bahawa jika $f(x)$ ialah fungsi x yang berkala dengan kalaan 2π , maka $f(x)$ yang diwakili oleh siri Fourier dalam persamaan (2.5.15) mempunyai nilai bagi pemalar a_0 , a_n dan b_n seperti berikut:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

2.5.4 Siri Fourier di dalam selang $(-L, L)$

Daripada bahagian 2.5.3, kita hanya dapat mencari siri Fourier bagi $f(x)$ yang ditakrifkan di dalam selang $(-\pi, \pi)$. Pada amnya siri Fourier boleh juga didapatkan bagi $f(x)$ yang

ditakrifkan dalam selang $(-L, L)$. Siri Fourier bagi fungsi ini di dalam selang $(-L, L)$ diberikan sebagai

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right) \quad (2.5.20)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx. \end{aligned}$$

Dengan membuat tukar gantian $x = \frac{L}{\pi}u$, siri (2.5.19) akan berbentuk

$$f\left(\frac{L}{\pi}u\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}u\right) du, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}u\right) \cos nudu, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}u\right) \sin nudu. \end{aligned}$$

dan ini menyerupai siri Fourier di dalam selang $(-\pi, \pi)$ (Jamalludin Talib, 1991).

BAB 3

KAEDAH PERMUKAAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA (PPS) BLOOR-WILSON

3.1 Pengenalan

Permukaan persamaan pembezaan separa (PPS) yang ditakrifkan sebagai suatu penyelesaian PPS menyediakan banyak kelebihan dalam permukaan adunan, permukaan bentuk bebas dan sebagainya. Dalam kertas ini, kita akan membincangkan kaedah membentuk permukaan bentuk bebas iaitu pasu. Kertas ini akan mengemukakan cara untuk menghasilkan pasu yang interaktif yang mempunyai keratan rentas pada bahagian atas dan bawah pasu mengikut input yang dimasukkan pengguna pada antaramuka yang disediakan dengan menggunakan PPS berdarjah empat dengan satu parameter pelicin. Input pengguna pada antaramuka menentukan bentuk bahagian atas dan bawah pasu. Pasu dalam pelbagai bentuk mudah dijana dengan mengubah parameter pelicin dan syarat sempadan pada PPS tersebut. Memandangkan prestasi perkakasan turut diambil kira dalam aplikasi grafik computer, PPS tersebut diselesaikan secara analitis. Kesan-kesan parameter pelicin dan syarat sempadan terhadap permukaan akhir akan turut dikaji. Atribut-atribut